問題

(1)　正八面体の 1 つの面を下にして水平な台の上に置く。
この八面体を真上から見た図（平面図）をかけ。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。
G1，G2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。
ただし，八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

（2008 東京大学）

解答と解説

(1)

正八面体の頂点を図 1 のようにとり，辺 BC および辺 DE の中点をそれぞれ M，N とする。

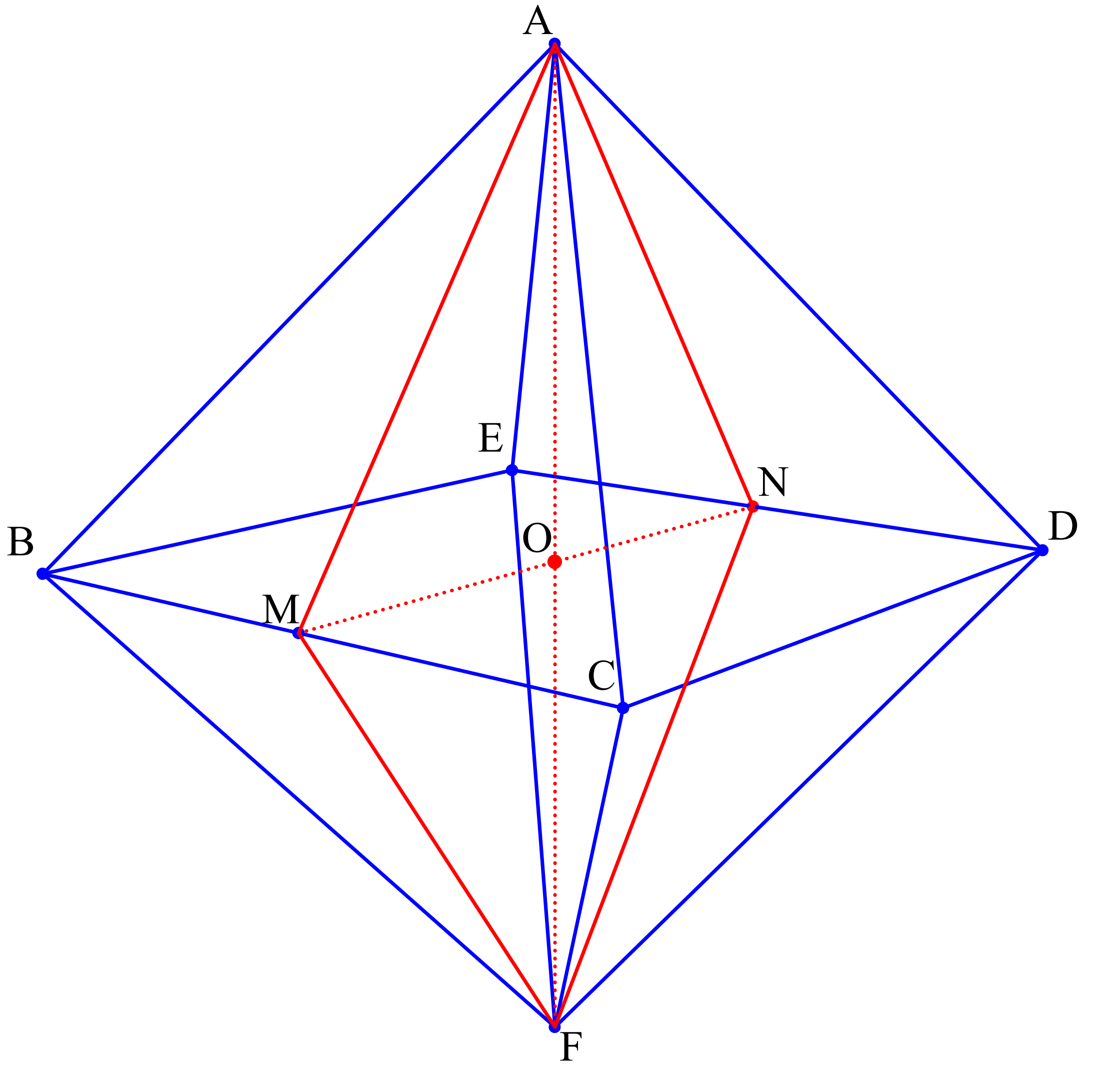


図 1

続いて，正八面体の各辺の長さを 1 とし，ひし形 AMFN について考察する。

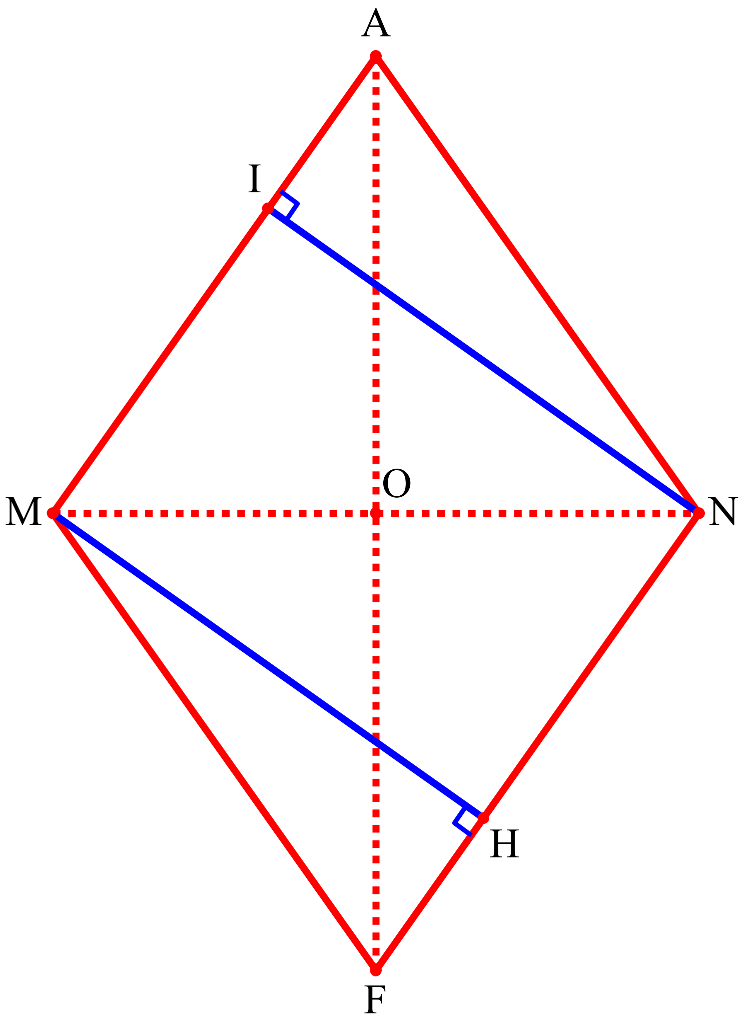


図 **2**

ひし形 AMFN は，その各辺が 1 辺の長さ 1 の正三角形の中線だから，1 辺の長さ＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$

点 M から辺 FN に下ろした垂線の足を H とすると，$MH^2 = MF^2 - FH^2$，$MH^2 = MN^2 - NH^2$

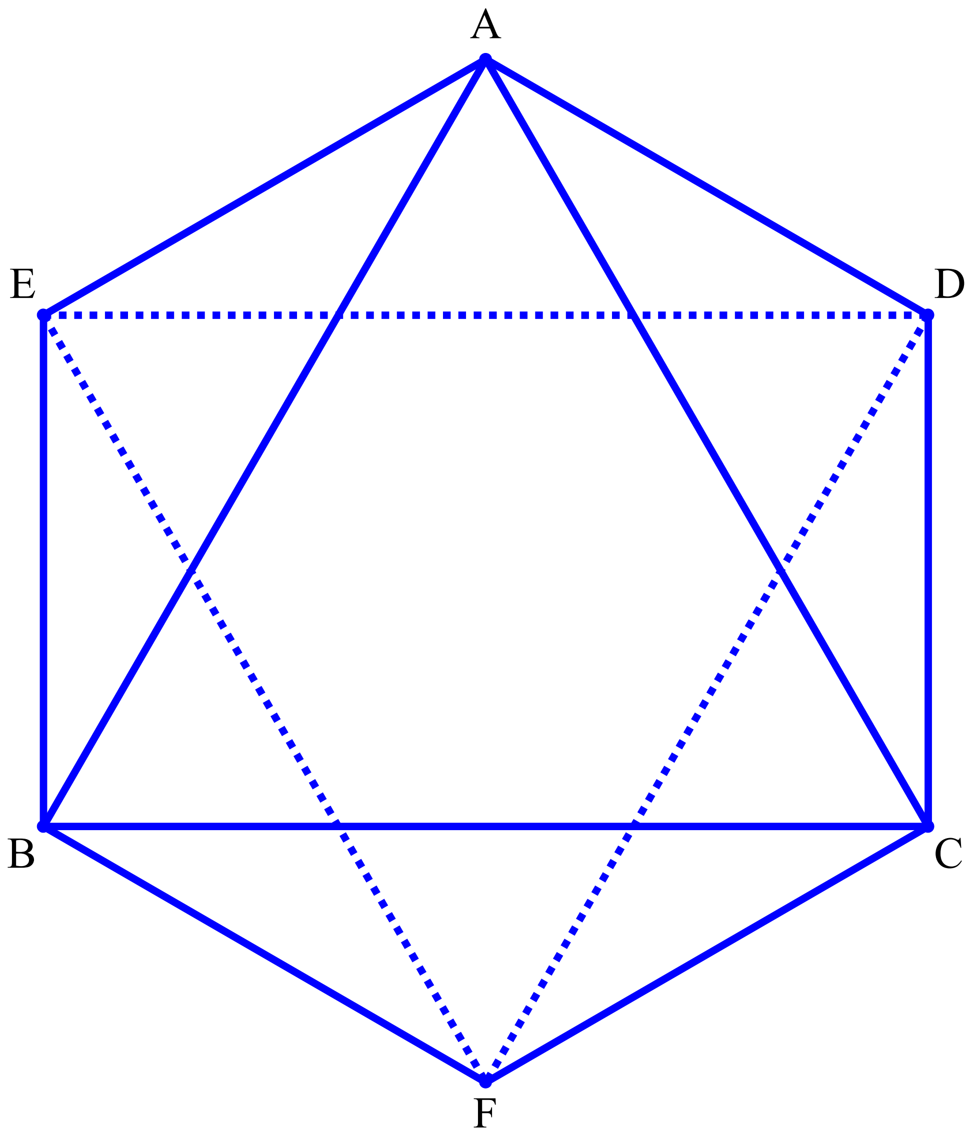
ここで FH＝x とおくと，$MF^2 - FH^2 = MN^2 - NH^2$，$MN = 1$ より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 \qquad \therefore \frac{3}{4} - x^2 = 1 - \frac{3}{4} - x^2 + \sqrt{3}x \qquad \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，$FH = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{FN}{3}$ ・・・①，同様に $AI = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{AM}{3}$ ・・・②

また，$MH = \sqrt{MF^2 - FH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ・・・③

以上より，図 1，図 2，①，②より，
正三角形 FDE を下にして水平な台に置いてこの八面体を真上から見ると，
下図のようになる。



(2)

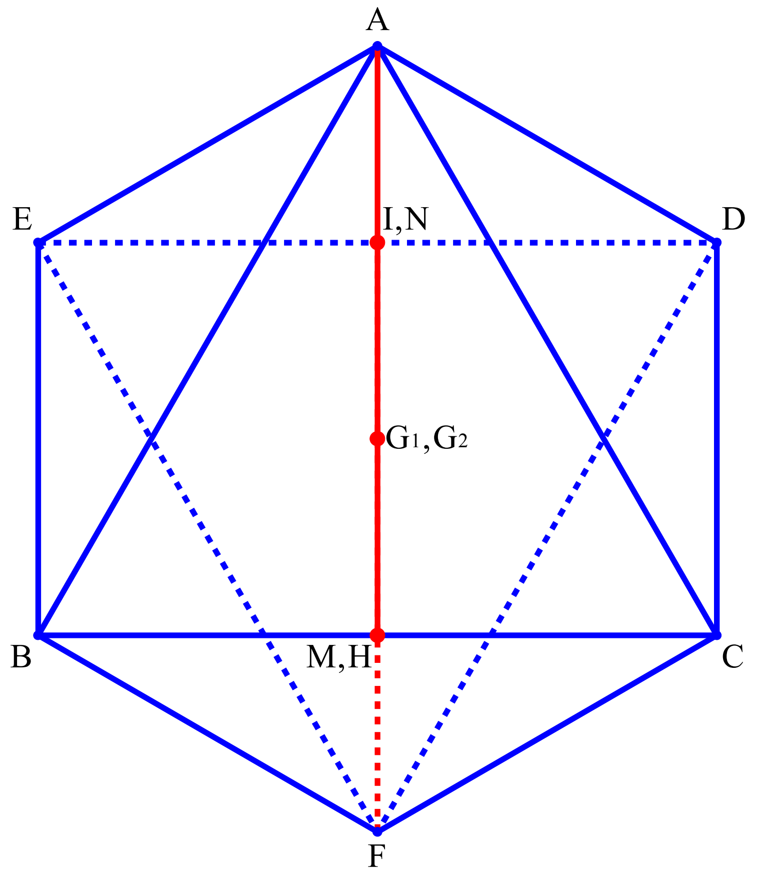
正三角形 ABC の重心と正三角形 FDE の重心をそれぞれ G_1,G_2 とすると,

①，②より，I は AM の 3 等分点，H は FN の 3 等分点だから,

G_1,G_2 はそれぞれ IM,HN の中点である。

よって，(1)の平面図において，下図のように G_1 と G_2 が重なる。

また，③より， $G_1G_2=\mathrm{MH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



そこで，$G_1\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$， $G_2(0,0,0)$ とし,

正三角形 FDE を xy 平面上，すなわち $z=0$ 上に置き,

この八面体の平面 $z=t$ $\left(0\leq t\leq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ による切断面について考察する。

平面 FED//平面 ABC//平面 $z=t$ より,

回転軸 G_1G_2 上の点を $\mathrm{O'}(0,0,t)$, 平面 $z=t$ と八面体の各辺との交点 P,Q,R,S,T,U とおくと,

任意の直線が平行な 3 つの平面により切り取られてできる 2 つの線分の長さの比と

直線を切り取った平面間の距離の比は等しいから,

（証明抜きで使ってもよいと思うが，一応，後で証明）

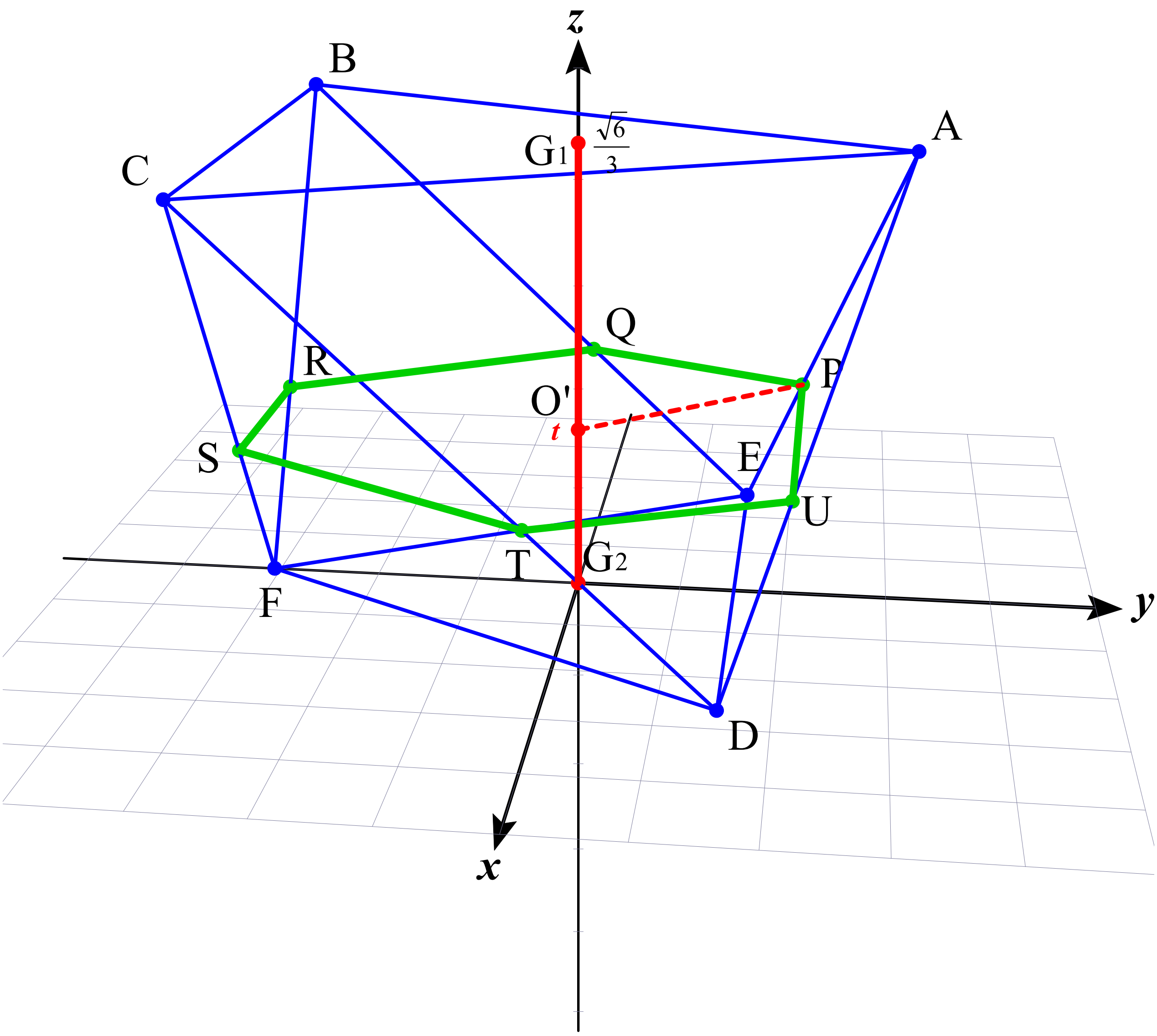
$\mathrm{EP}:\mathrm{PA}=\mathrm{EQ}:\mathrm{QB}=\mathrm{FR}:\mathrm{RB}=\mathrm{FS}:\mathrm{SC}=\mathrm{DT}:\mathrm{TC}=\mathrm{DU}:\mathrm{UA}=\mathrm{G_2O'}:\mathrm{O'G_1}=t:\dfrac{\sqrt{6}}{3}-t$

また， $\Delta\mathrm{G_1AO'}\equiv\Delta\mathrm{G_1BO'}\equiv\Delta\mathrm{G_1CO'}$， $\Delta\mathrm{G_2DO'}\equiv\Delta\mathrm{G_2EO'}\equiv\Delta\mathrm{G_2FO'}$ より，

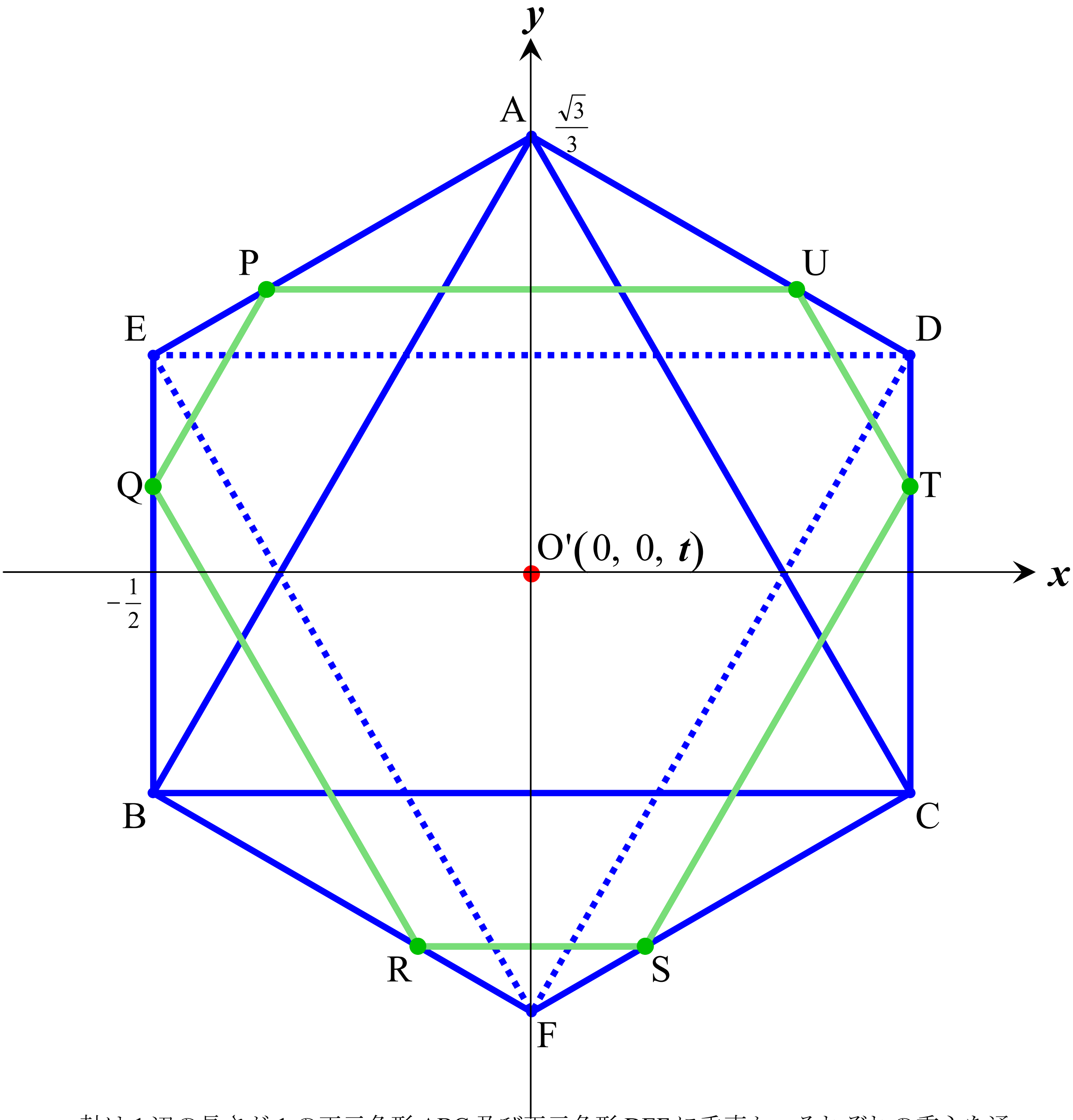
$\mathrm{O'A}=\mathrm{O'B}=\mathrm{O'C}$， $\mathrm{O'D}=\mathrm{O'E}=\mathrm{O'F}$

よって， $\mathrm{O'P}=\mathrm{O'Q}=\mathrm{O'R}=\mathrm{O'S}=\mathrm{O'T}=\mathrm{O'U}$

したがって，$\mathrm{G_1G_2}$ を回転軸とする回転体の断面を半径 $\mathrm{O'P}$ の円としてよい。



そこで，次に，半径 $\mathrm{O'P}$ の 2 乗を t を用いて表すことにする。



z 軸は 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC 及び正三角形 DEF に垂直かつそれぞれの重心を通るから，$\mathrm{A}\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$ である。

また，$\mathrm{O'}(0,0,t)$ とすると，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\frac{\sqrt{6}}{3}-t:t=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}-t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-t\right)+t}:\frac{t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-t\right)+t}=1-\frac{\sqrt{6}}{2}t:\frac{\sqrt{6}}{2}t$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}=\frac{\sqrt{6}}{2}t\cdot\overrightarrow{\mathrm{O'A}}+\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}t\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{O'E}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}t\cdot\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}-t\end{pmatrix}+\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}t\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}t\\ \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{O'P}}\right|^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}t+\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{6}}{12}t+\frac{1}{8}t^2$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{6}}{6}t+\frac{1}{3}$$

よって，この回転体の平面 $z=t$ による切断面の面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{6}}{6}t+\frac{1}{3}\right)\quad\left(0\leq t\leq\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

よって，求める体積は，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(t)dt=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{6}}{6}t+\frac{1}{3}\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{\sqrt{6}}{12}t^2+\frac{1}{3}t\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{6\sqrt{6}}{27}-\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{6}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{27}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi$$ ・・・(答)

補足

平面α上の任意の 2 点を A,D，平面γ上の任意の 2 点を C,F とし，

線分 AC，線分 DF，線分 DC と平面βとの交点をそれぞれ B,E,G とすると，

平面α//平面β//平面γのとき，AD//BG より $\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}$，CF//GE より $\frac{ED}{FE}=\frac{DG}{GC}$

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}=\frac{ED}{FE}$

よって，

互いに平行な平面により切り取られた線分の長さの比は平面間の距離の比と等しい。